INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN MARAMUREŞ

MINISTERUL EDUCAŢIEI ŞI CERCETĂRII ŞTIINŢIFICE

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ

„ADOLF HAIMOVICI”

Barem de corectare

clasa a X – a

Filiera teoretică – Profil real – Specializarea Ştiinţe ale naturii

1) a) Se raţionalizează toate fracţiile şi obţinem S=42……………………………………………**4p**

b) Obţinem $x^s = x^{42} = \left(\sqrt{\sqrt[3]{2}}\right)^{42} = \sqrt[3]{2}^{21} = 2^7 = 128$……………………………**3p**

2) a) Se trec ambii logaritmi în baza 2 şi notăm $\log_2 3 = m$ obţinem $a = \frac{4+m}{3+2m}$ şi $b = \frac{3+m}{1+m}$ care verifică egalitatea ………………………………………………………………**4p**

b) Aplicând proprietatea 1 de la logaritmi se obţine:

$\lg\frac{2^2\cdot3^2\cdot4^2\cdot\ldots\cdot99^2}{1\cdot3\cdot2\cdot4\cdot\ldots\cdot98\cdot100} + \lg\frac{500}{99} = \lg\frac{99}{50} + \lg\frac{500}{99} = \lg 10 = 1$ ……………………………**3p**

3) a) Dacă $|z| = 1 \Rightarrow \bar{z}=\frac{1}{z}$ ………………………………………………………………**1p**

Dacă $\bar{z} = z \Rightarrow z \in R$ ………………………………………………………………**1p**

$\overline{\left(\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}+\overline{z_2}}{1+\overline{z_1}\,\overline{z_2}} = \frac{\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}}{1+\frac{1}{z_1}\cdot\frac{1}{z_2}} = \frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2} \Rightarrow \frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2} \in \boldsymbol{R}$ ……………………………**2p**

b) Se obţine ecuaţia de gradul II $z^2 - 2cosx\cdot z + 1 = 0$ cu soluţiile:

$z_{1,2} = cosx \pm isinx$ ………………………………………………………………**1p**

$z_1^n + \frac{1}{z_1^n} = 2cosnx$ ………………………………………………………………**1p**

$z_2^n + \frac{1}{z_2^n} = 2cosnx$ ………………………………………………………………**1p**

4) a) Fie $a = r_1(cost_1 + isint_1) \in \boldsymbol{C}$

b= $r_2(cost_2 + isint_2) \in \boldsymbol{C}$

Ecuaţia bipătrată are soluţiile:

$z^2 = a \Rightarrow z^2 = r_1(cost_1 + isint_1)$

$z^2 = b \Rightarrow z^2 = r_2(cost_2 + isint_2)$

$z_1 = \sqrt{r_1}\left(cos\frac{t_1}{2} + isin\frac{t_1}{2}\right)$ ………………………………………………………**1p**

$z_2 = \sqrt{r_1}\left(\cos\left(\frac{t_1}{2}+\pi\right) + isin\left(\frac{t_1}{2}+\pi\right)\right)$ ……………………………………………**1p**

$z_3 = \sqrt{r_2}\left(cos\frac{t_2}{2} + isin\frac{t_2}{2}\right)$ ………………………………………………………**1p**

$z_4 = \sqrt{r_2}\left(\cos\left(\frac{t_2}{2}+\pi\right) + isin\left(\frac{t_2}{2}+\pi\right)\right)$ ………….....…………………………………..**1p**

b) Dacă $|a| = |b| = r$ şi $a \neq b$

$\Rightarrow z_1 = \sqrt{r}\left(cos\frac{t_1}{2} + isin\frac{t_1}{2}\right)$

$z_2 = \sqrt{r}\left(\cos\left(\frac{t_1}{2}+\pi\right) + isin\left(\frac{t_1}{2}+\pi\right)\right)$ ……………………………………………..**1p**

$z_3 = \sqrt{r}\left(cos\frac{t_2}{2} + isin\frac{t_2}{2}\right)$

$z_4 = \sqrt{r}\left(\cos\left(\frac{t_2}{2}+\pi\right) + isin\left(\frac{t_2}{2}+\pi\right)\right)$ ……………..…………………………………..**1p**

Avem $z_1 = -z_2$ şi $z_3 = -z_4 \Rightarrow$ patrulaterul determinat de imaginile geometrice ale soluţiilor este un paralelogram cu centrul în O. Cum acest paralelogram este inscriptibil în cercul de centru O şi rază $\sqrt{r}$, el chiar este un dreptunghi. ………………………………………………**1p**